

# Práctica: realización y presentación de resultados

## Laboratorio Física I

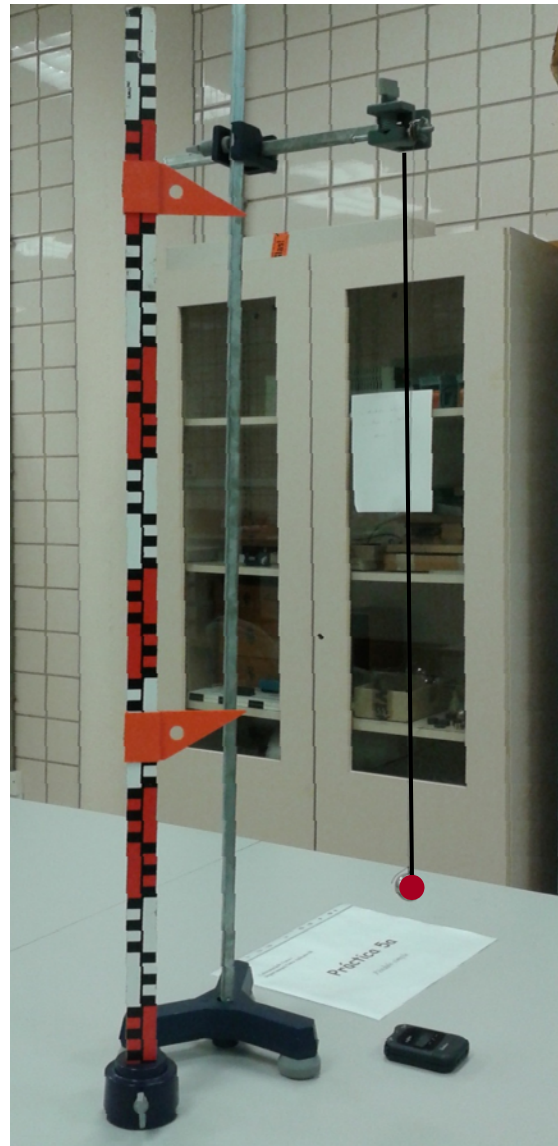
# Página web Prácticas Física I

[http://tesla.us.es/f1\\_practicas/herramientas/  
herramientas.php](http://tesla.us.es/f1_practicas/herramientas/herramientas.php)

# Índice

- Material
- Toma de datos
  - Incertidumbre absoluta y relativa
  - Cifras significativas
  - Regla de redondeo
- Media e incertidumbre
- Propagación de incertidumbre
- Recta de regresión
  - Cálculo
  - Gráfica

# Material





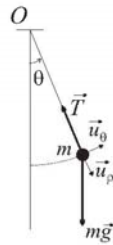
## Práctica 5: PÉNDULO SIMPLE

### 1 Objeto de la práctica

En esta práctica se determinará la aceleración de la gravedad a partir del estudio del péndulo simple.

### 2 Fundamento teórico

Un péndulo simple es un sistema formado por una partícula de masa  $m$  suspendida de un punto fijo mediante un hilo de masa despreciable, inextensible y de longitud  $L$ . El movimiento tiene lugar en el plano vertical. Para pequeñas amplitudes, el movimiento de la partícula es un movimiento armónico simple.



Sobre la partícula actúa una fuerza activa debida al campo gravitatorio y una fuerza de reacción vincular, la tensión, que ejerce el hilo. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

proyectando sobre la base polar  $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta\}$ :

$$\begin{aligned} mg \cos\theta - T &= -mL\dot{\theta}^2 && \text{componente radial} \\ -mg \sin\theta &= mL\ddot{\theta} && \text{componente acimutal} \end{aligned}$$

La componente acimutal es la ecuación del movimiento. Si las amplitudes son pequeñas, significa que el ángulo  $\theta$  desplazado tiene que ser pequeño y se puede aproximar  $\sin\theta \cong \theta$ . La ecuación queda:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (1)$$

que es la ecuación del movimiento armónico simple. La frecuencia angular es  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$  y el periodo  $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ , ambas magnitudes sólo dependen de la longitud del hilo,  $L$ , y de la gravedad  $g$ .

## Boletín

- Objetivo
- Fundamento teórico
- Instrumental
- Medidas en el laboratorio
- Análisis de datos
- Cuestiones



**Práctica 5: Péndulo simple**

GRADO		ALUMNO(S) QUE REALIZARON LA PRÁCTICA	GRUPO
FECHA DE REALIZACIÓN			
FECHA DE ENTREGA			

**Revisión de inventario**

- Una bola de acero
- Un hilo inextensible
- Soporte vertical
- Una regla graduada
- Un cronómetro digital

	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$
$t_1$					
$t_2$					
$t_3$					
$\langle t \rangle$					
$\langle T \rangle$					
$\langle T \rangle^2$					

Datos		Recta de mejor ajuste
$L$	$\langle T \rangle^2$	$\langle T \rangle^2 = A + B L$
		$A =$
		$B =$
		$r =$
		<b>Gravedad</b>
		$g =$

# Material

## Ficha

- Componentes del grupo
- Inventario
  - (revisarlo al principio y al finalizar la práctica)
- Toma de datos: casillas blancas
- Análisis de datos y resultados: casillas sombreadas

## Memoria

- Ficha sellada con todos los resultados
- Gráficas
- Cuestiones

# Toma de datos

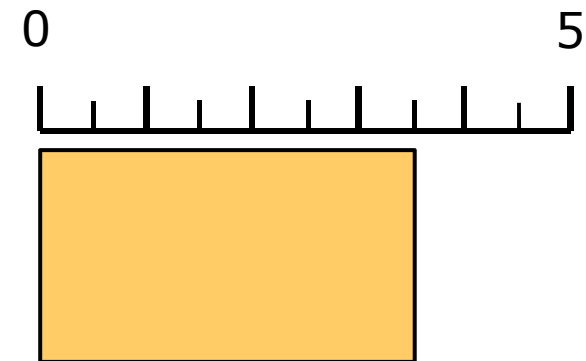
Toda medida experimental consta de:

- **Valor numérico**
- **Unidad**
- **Error** o **incertidumbre**: precisión del aparato de medida, es la mínima división que aprecia



**20.69** ± **0.01** s

**3.5** ± **0.5** mm



# Incertidumbre absoluta y relativa



$20.69 \pm 0.01 \text{ s}$

**incertidumbre absoluta,**  
las mismas unidades que la medida

**incertidumbre relativa:**

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{t} = \frac{0.01 \text{ s}}{20.69 \text{ s}} = 0.0005 = 0.05 \%$$

**Adimensional**  
**No tiene unidades**



# Cifras significativas

Son las que aportan información sobre el dato.  
Los ceros a la derecha tienen significado.

**Cifras significativas  $\neq$  n<sup>o</sup> de decimales**

38 g; 0.038 Kg  $\implies$  2 cifras (ningún decimal y 3 decimales)

**3.50 s** 3 cifras. El error afecta a la centésima de segundo

**3.5 s** 2 cifras. El error afecta a la décima de segundo

**3.50 s  $\neq$  3.5 s**

**45300 m**  $\longrightarrow$  Notación científica: **45.3  $\times$  10<sup>3</sup> m**  
¿5? o ¿3? cifras 3 cifras

# Regla de redondeo

- Se escriben cantidad y error con todas sus cifras:

$$m = 2.83256 \pm 0.08621 \text{ kg}$$

- Se examinan las dos primeras cifras significativas del error  
¿Son  $\leq 25$ ?
  - **Si**: se retienen ambas y se redondea
  - **No**: se retiene la primera y se redondea

**Redondeo**: afecta a la última cifra retenida

- Si la siguiente cifra es  $<5$ : **se mantiene**
- Si la cifra siguiente es  $\geq 5$ : **se incrementa una unidad**

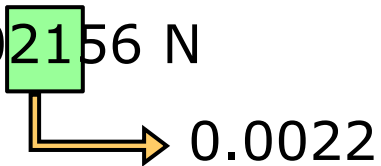
# Regla de redondeo

$$m = 2.83256 \pm 0.09 \text{ kg}$$

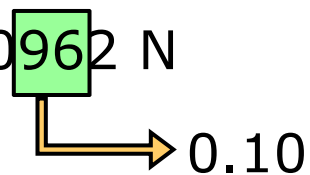
- Una vez ajustadas las cifras significativas del error, se ajusta el número de decimales de la medida

$$\begin{array}{l} 0.09 \\ 2.83\color{red}{|}256 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0.09 \\ 2.83\color{red}{|}256 \end{array}} \right\} m = 2.83 \pm 0.09 \text{ kg} = 2.83(9) \text{ kg}$$

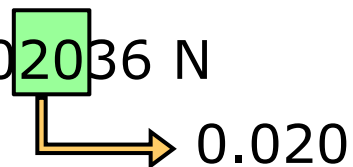
# Regla de redondeo: ejemplos

$$F = 2.30408415 \pm 0.002156 \text{ N}$$


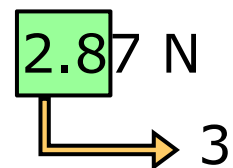
$$F = 2.3041 \pm 0.0022 \text{ N}$$

$$F = 2.30408415 \pm 0.0962 \text{ N}$$


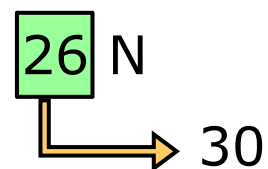
$$F = 2.30 \pm 0.10 \text{ N}$$

$$F = 2.30408415 \pm 0.02036 \text{ N}$$


$$F = 2.304 \pm 0.020 \text{ N}$$

$$F = 2.30408415 \pm 2.87 \text{ N}$$


$$F = 2 \pm 3 \text{ N}$$

$$F = 2.30408415 \pm 26 \text{ N}$$


$$F = 0 \pm 30 \text{ N}$$

# Media e incertidumbre

Realizando varias medidas de la misma magnitud se reduce la incertidumbre.

$t \pm 0.01 \text{ s}$
10.96
10.94
10.95
10.92

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

Incertidumbre:

$$E_t = \frac{2\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

**Desviación  
cuadrática  
media**

~~$$\bar{t} = 10.9425 \pm 0.01708 \text{ s}$$~~

$$\bar{t} = 10.943 \pm 0.017 \text{ s}$$

Si  $E_t$  es menor que la incertidumbre del instrumento de medida, se escoge esta última

# Media e incertidumbre

Utilizando el programa lineal.xls

Datos		Parámetros de la recta	Estadística de $x$
$x$	$y$	Ordenada en el origen $A=0$	Número de términos $S_x=4$
10.96		Incertidumbre de la ordenada $E_A=0$	<b>Media de <math>x</math></b> $\langle x \rangle = 10.9425$
10.94			Varianza de $x$ $V(x)=0.00021875$
10.95		Pendiente $B=0$	
10.92			Incertidumbre de la pendiente $E_B=0$
		Coefficiente de correlación $r=0$	
		Extrapolaciones	Estadística de $y$
		Valor de la abscisa $x_0=0.25$	Número de términos $S_y=0$
		$y$ extrapolado $\hat{y} = A+B x_0 = 0$	Media de $y$ $\langle y \rangle = 0$
		Incertidumbre de $\hat{y}$ $E_y = 0$	Varianza de $y$ $V(y)=0$
		Covarianza de $x$ e $y$ $\sigma_{xy}=0$	Incertidumbre de $\langle y \rangle$ $E_{\langle y \rangle} = 0$

$t \pm 0.01 \text{ s}$
10.96
10.94
10.95
10.92

# Propagación de incertidumbre

- Magnitud en función de otra magnitud que tiene incertidumbre.

$$f(x) \pm E_f \quad \text{Se deriva respecto a la variable que tiene error} \quad E_f = \left| \frac{df}{dx} \right|$$

Ejemplo:

$$f(t) = t^2$$

$$E_{t^2} = 2 t E_t$$

$$t^2 \pm 2 t E_t$$

$$\bar{t} = 10.943 \pm 0.017 \text{ s} \quad \longrightarrow \quad t^2 = 119.7 \pm 0.4 \text{ s}^2$$

# Propagación de incertidumbre

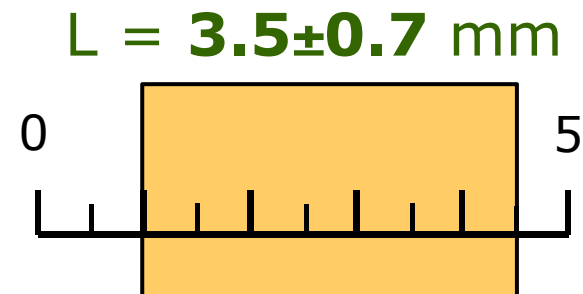
- Magnitud en función de varias magnitudes que tienen incertidumbre.

$$z = f(x, y) \quad E_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 E_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 E_y^2}$$

$$L = l_2 - l_1$$

$$E_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial l_1}\right)^2 E_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial l_2}\right)^2 E_{l_2}^2} =$$
$$\sqrt{E_{l_1}^2 + E_{l_2}^2} = E_{l_1} \sqrt{2} = 0.5 \sqrt{2} = 0.7 \text{ mm}$$

$$E_{l_1} = E_{l_2} = 0.5 \text{ mm}$$





# Propagación de incertidumbre

- Magnitud en función de varias magnitudes que tienen incertidumbre.

$$f = \frac{x y}{z} ; E_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 E_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 E_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 E_z^2}$$

Es mejor calcular la incertidumbre relativa

$$\varepsilon_f = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} ; \text{ siendo } \varepsilon_x = \frac{E_x}{x}$$

- Se calcula el valor de  $f$  y luego su incertidumbre:

$$f = \frac{x y}{z} ; E_f = f \varepsilon_f$$

# Tabla: presentación datos

		$L_1 \pm 0.07$ cm	$L_2 \pm 0.07$ cm	$L_3 \pm 0.07$ cm	$L_4 \pm 0.07$ cm	$L_5 \pm 0.07$ cm
		<b>70.00</b>	<b>60.00</b>	<b>50.00</b>	<b>40.00</b>	<b>30.00</b>
$t_1$	$\pm 0.01$ s	16.59	15.62	14.29	12.62	10.88
$t_2$	$\pm 0.01$ s	16.70	15.61	14.07	12.77	11.03
$t_3$	$\pm 0.01$ s	16.61	15.59	14.38	12.86	11.09

# Tabla: presentación datos

		$L_1 \pm 0.07$ cm	$L_2 \pm 0.07$ cm	$L_3 \pm 0.07$ cm	$L_4 \pm 0.07$ cm	$L_5 \pm 0.07$ cm
		<b>70.00</b>	<b>60.00</b>	<b>50.00</b>	<b>40.00</b>	<b>30.00</b>
$t_1$	$\pm 0.01$ s	16.59	15.62	14.29	12.62	10.88
$t_2$	$\pm 0.01$ s	16.70	15.61	14.07	12.77	11.03
$t_3$	$\pm 0.01$ s	16.61	15.59	14.38	12.86	11.09
$\langle t \rangle$	s	<b>16.63(7)</b>	<b>15.607(18)</b>	<b>14.25(18)</b>	<b>12.75(14)</b>	<b>11.00(12)</b>
$\langle T \rangle$	s	<b>1.663(7)</b>	<b>1.5607(18)</b>	<b>1.425(18)</b>	<b>1.275(14)</b>	<b>1.100(12)</b>
$\langle T \rangle^2$	$s^2$	<b>2.766(23)</b>	<b>2.436(6)</b>	<b>2.03(5)</b>	<b>1.63(4)</b>	<b>1.21(3)</b>

# Recta de regresión

- Se verifica la dependencia lineal entre las magnitudes

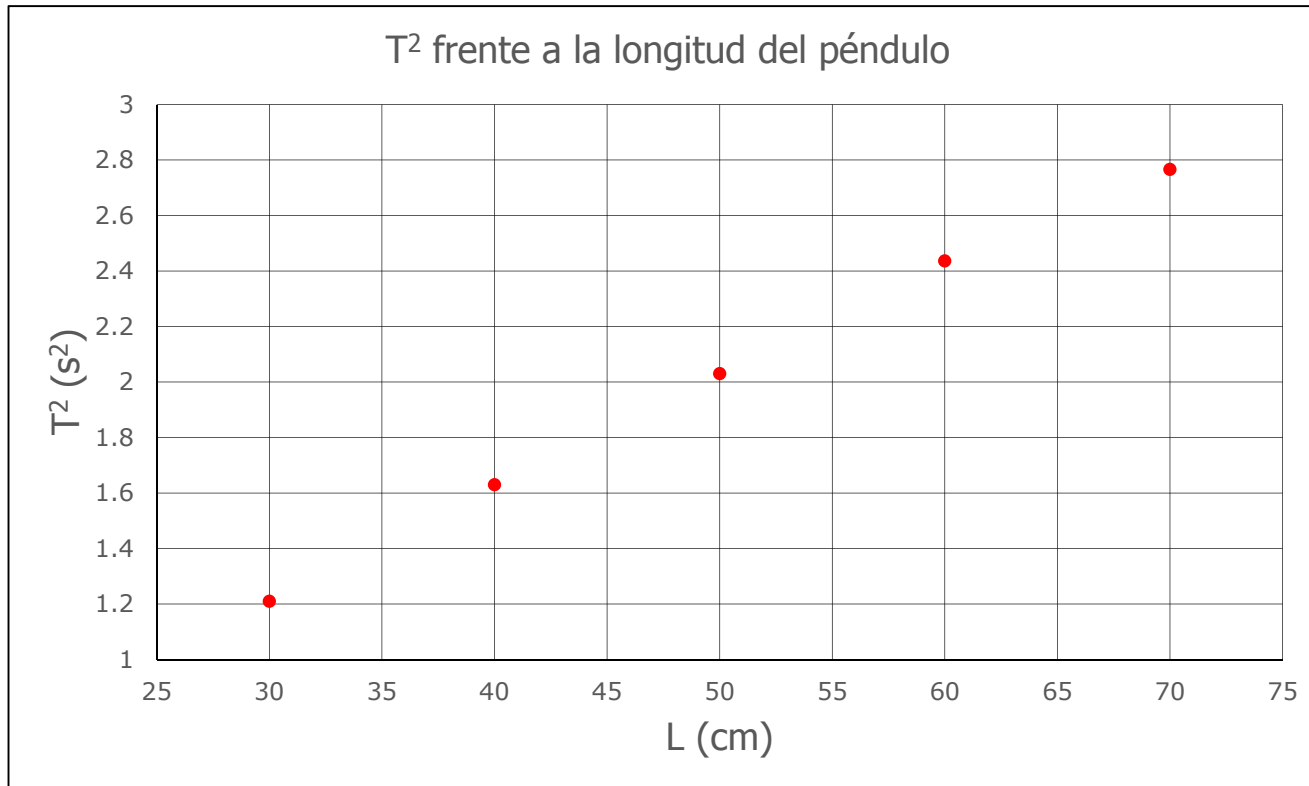
Datos		Recta de mejor ajuste
$L \pm 0.07$ cm	$\langle T \rangle^2 \text{ s}^2$	$\langle T \rangle^2 = A + B L$
70.00	2.766(23)	$A =$
60.00	2.436(6)	$B =$
50.00	2.03(5)	$r =$
40.00	1.63(4)	Gravedad
30.00	1.21(3)	$g =$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

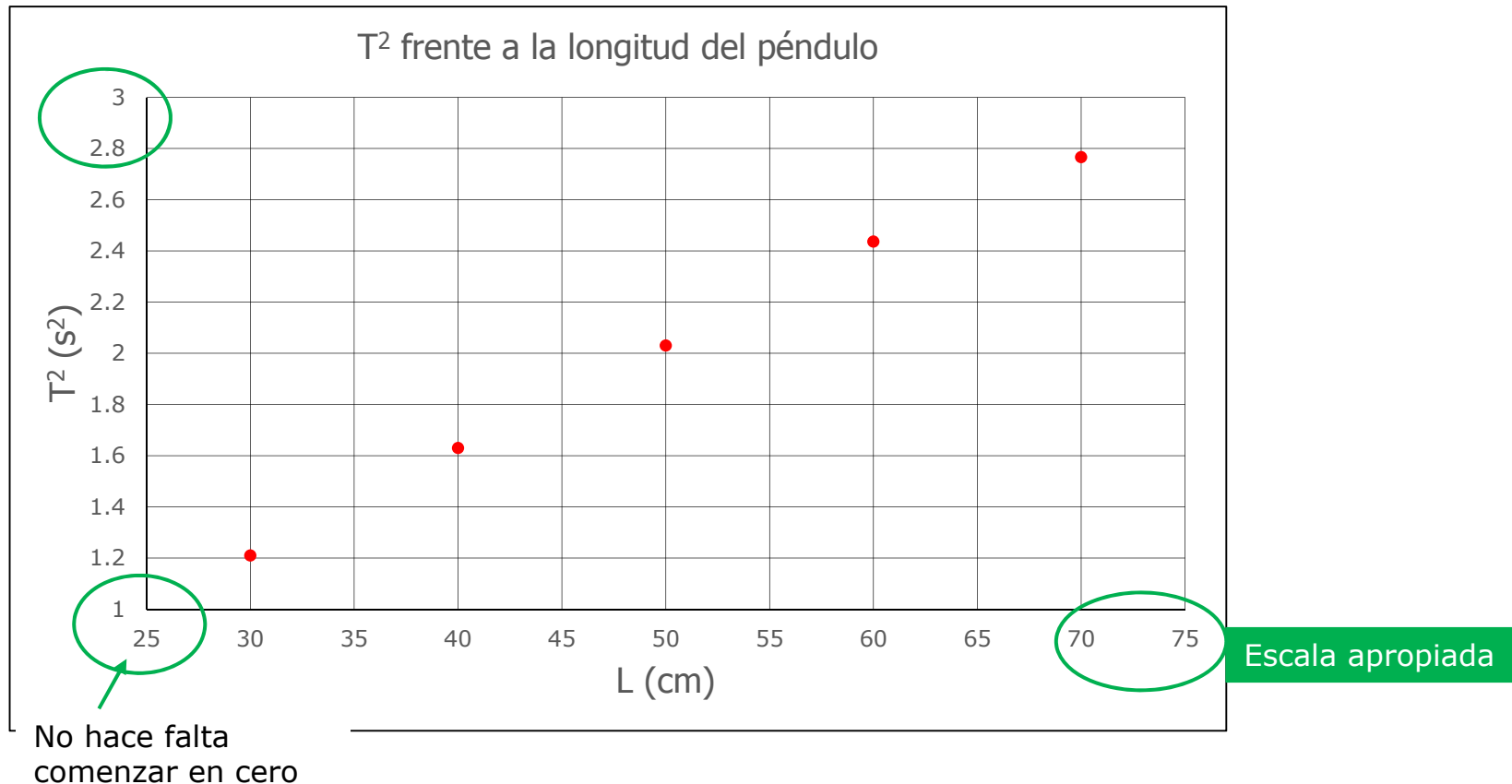
# Recta de regresión: gráfica

- Se representan los puntos experimentales



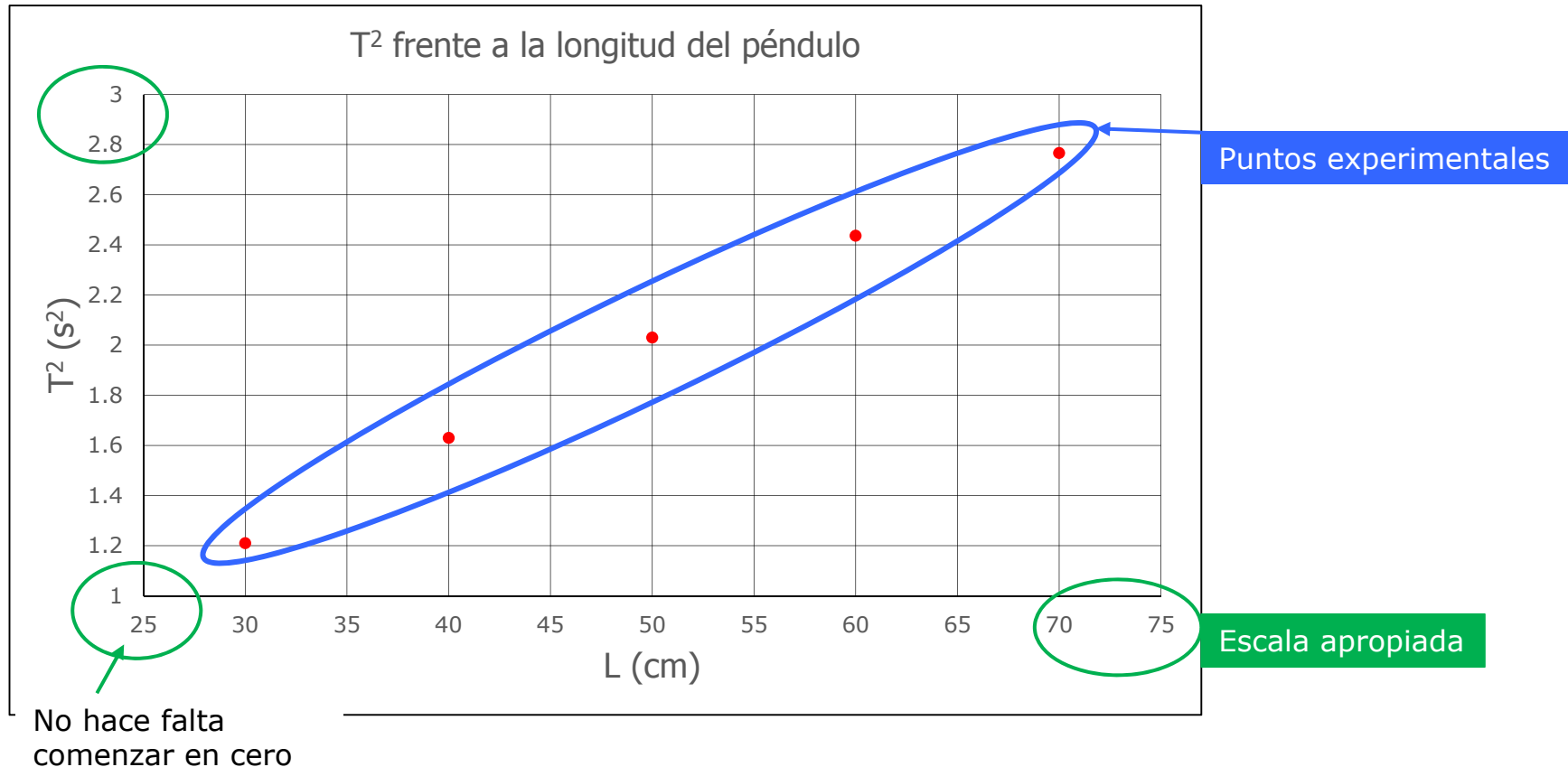
# Recta de regresión: gráfica

- Se representan los puntos experimentales



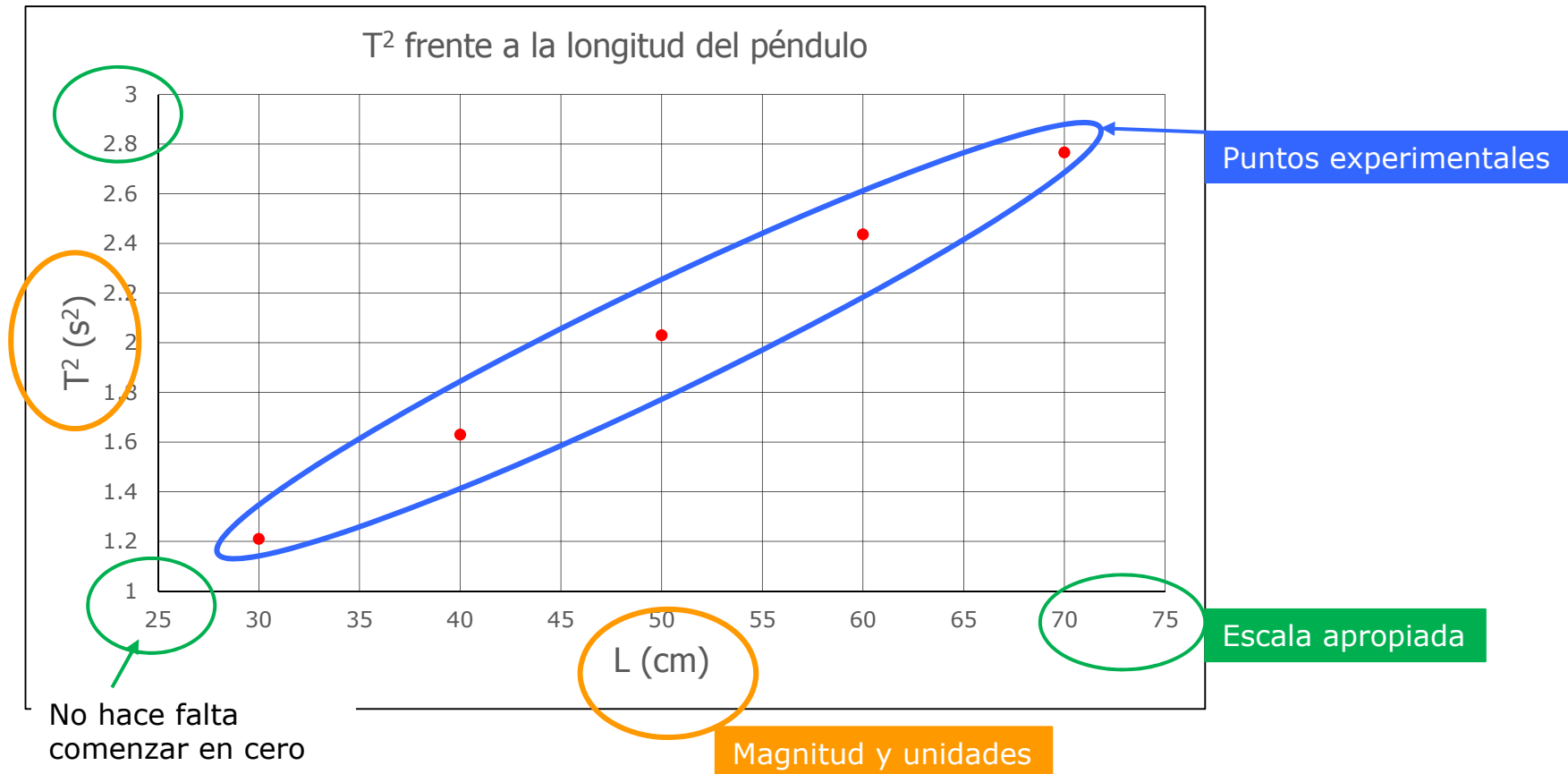
# Recta de regresión: gráfica

- Se representan los puntos experimentales



# Recta de regresión: gráfica

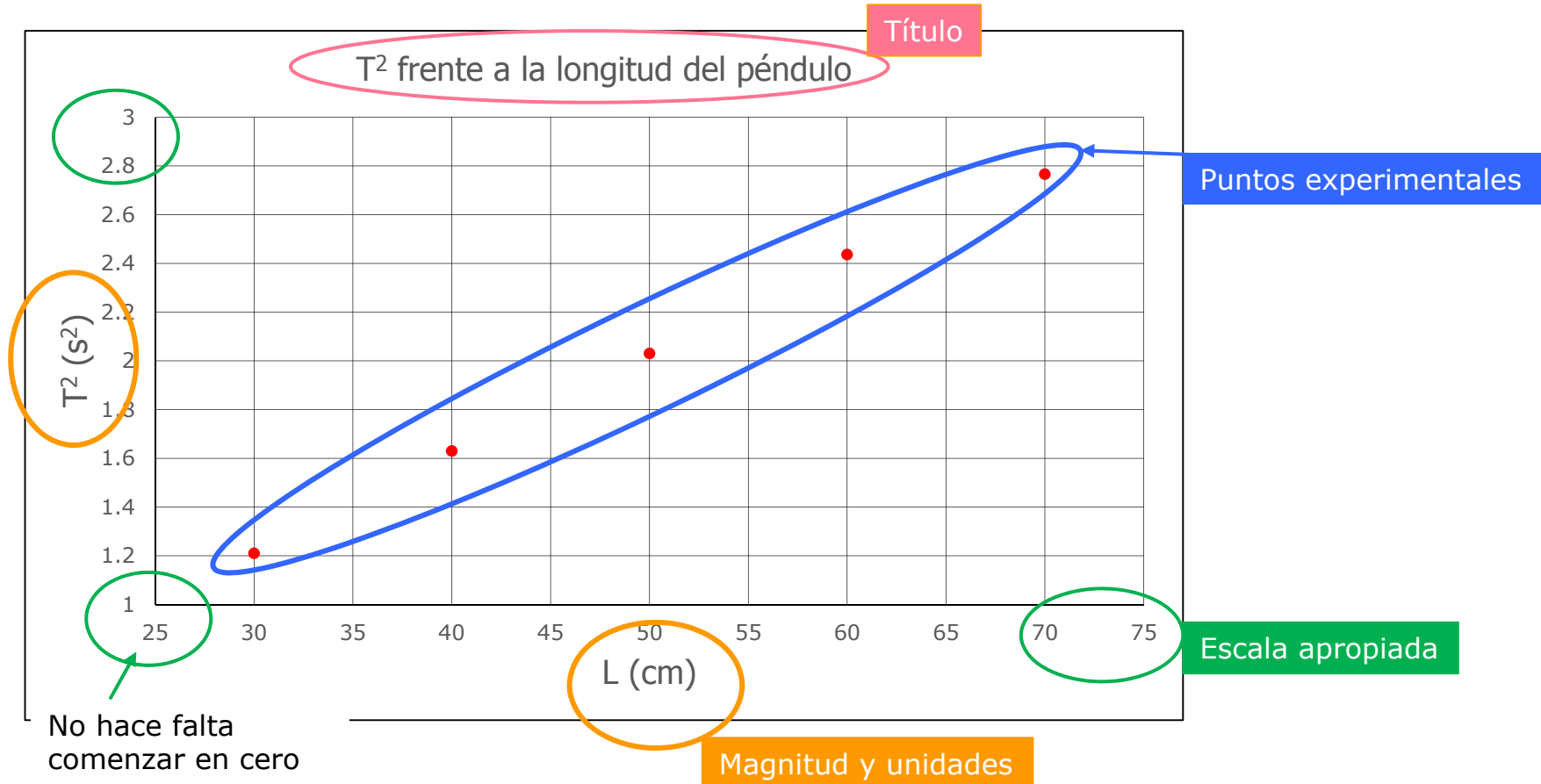
- Se representan los puntos experimentales





# Recta de regresión: gráfica

- Se representan los puntos experimentales



# Recta de regresión: cálculo

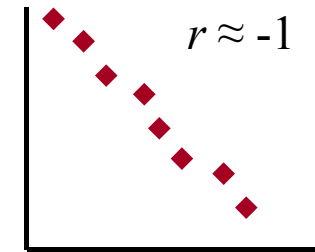
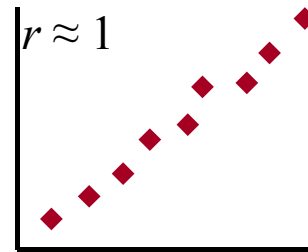
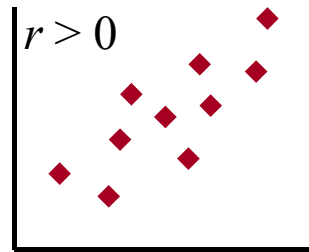
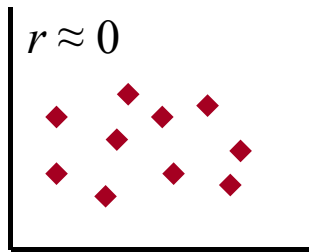
- Se calcula la pendiente, ordenada y coeficiente de correlación. Utilizando la aplicación `lineal.xls`

**Recta de regresión lineal:  $y=a+b x$**

Datos		Parámetros de la recta	Estadística de $x$
$x$	$y$	Ordenada en el origen $a = 0.0554$	Ordenada en el origen $S_x = 5$
70.00	2.766	Error de la ordenada $E_a = 0.097540146$	Media de $x$ $\langle x \rangle = 50$
60.00	2.436	Pendiente $b = 0.03918$	Varianza de $x$ $V(x) = 200$
50.00	2.03	Error de la pendiente $E_b = 0.001877161$	Desviación estándar de $x$ $\sigma_x = 14.1421356$
40.00	1.63	Coeficiente de correlación $r = 0.999140304$	
30.00	1.21		

$T^2$  → (points to the  $y$  column)  
 $L$  → (points to the  $x$  column)  
Valores (circles the data rows)

- ¿Qué es el coeficiente de correlación? ( $r$ )
  - Es una medida del grado de alineación
  - $r \in (-1,1)$



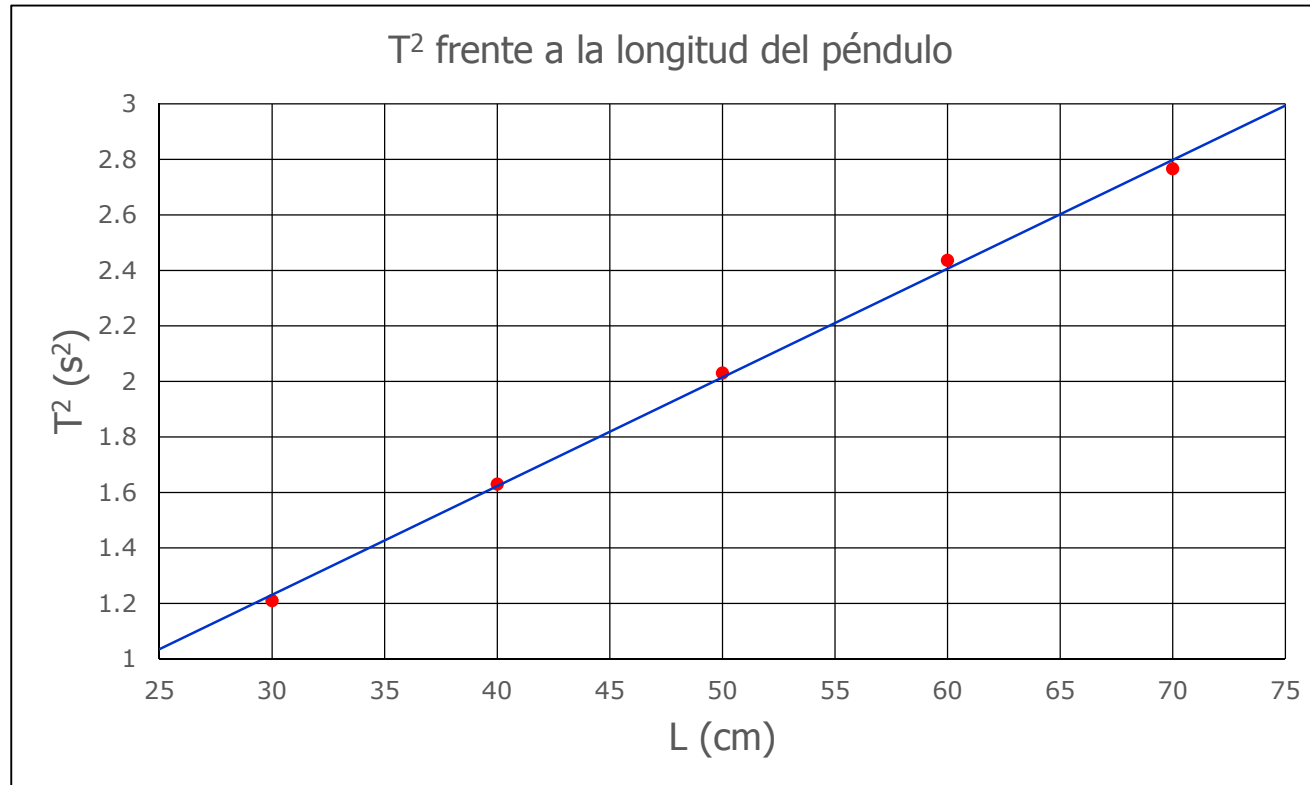
- No tiene error
- No tiene unidades

Se escribe hasta la primera cifra distinta de 9 sin redondear.

<b>Ejemplos</b>		$r = 0.999678$	$\longrightarrow$	$r = 0.9996$
$r = -0.99128$	$\longrightarrow$	$r = -0.991$	$r = 1.099678$	$\longrightarrow$ <b>ERRÓNEO</b>

# Recta de regresión: gráfica

- En la misma gráfica se representa la recta de regresión



# Recta de regresión

- Se compara la ecuación de la recta con la ley teórica

$$T^2 = A + B L$$
$$T^2 = \quad + \frac{4\pi^2}{g} L \quad \longrightarrow \quad B = \frac{4\pi^2}{g}$$

$B = 0.0392 \pm 0.0019 \text{ s}^2/\text{cm}$

$$g = \frac{4\pi^2}{B}$$
$$E_g = \left| \frac{dg}{dB} \right| E_B = \frac{4\pi^2}{B^2} E_B$$

$g = 10.1 \pm 0.5 \text{ m/s}^2$

# Interpolación y extrapolación

- A partir de la recta de regresión se calculan nuevos valores
  - Interpolación:  $x_0$  está dentro del rango de valores
  - Extrapolación:  $x_0$  está fuera del rango

$$\hat{y} = A + B x_0$$

# Interpolación y extrapolación

Datos de la gráfica

Datos		Parámetros de la recta	Estadística de $x$
$x$	$y$	Ordenada en el origen $a = 0.0554$	Número de términos $S_x = 5$
70.00	2.766	Error de la ordenada $E_a = 0.097540146$	Media de $x$ $\langle x \rangle = 50$
60.00	2.436	Pendiente $b = 0.03918$	Varianza de $x$ $V(x) = 200$
50.00	2.03	Error de la pendiente $E_b = 0.001877161$	Error de la media de $x$ $E_{\langle x \rangle} = 14.1421356$
40.00	1.63	Coefficiente de correlación $r = 0.999140304$	
30.00	1.21		
		Extrapolaciones	Estadística de $y$
	Valor	Valor de la abscisa $x_0 = 55.00$	Número de términos $S_y = 5$
Interpolación		$y$ extrapolado $y = a + b x_0 = 2.2103$	Media de $y$ $\langle y \rangle = 2.0144$
		Error de $y$ $E_y = 0.028157415$	Varianza de $y$ $V(y) = 0.30754304$
		Covarianza de $x$ e $y$ $\sigma_{xy} = 7.836$	Error de la media de $y$ $E_{\langle y \rangle} = 0.55456563$

# No olvidar

- Poner todas las unidades
- Poner todas las incertidumbres (tienen unidades)
- Cifras significativas
- Cálculo de incertidumbres: propagación
- Recta de regresión: A y B tienen unidades y errores.
- Gráfica: escalas adecuadas, título, ejes, magnitudes, unidades, puntos experimentales, recta de regresión

## **Memoria de práctica:**

- Ficha terminada
- Cuestiones
- Gráficas